10.5　傅里叶级数

10.5.1　三角函数系的正交性

1．三角级数

最简单的周期运动：简谐振动 $y=A\sin(\omega t+\varphi)$

$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$， A为振幅，ω为角频， φ为初相。

较复杂的周期运动：$y=\sum_{k=1}^{n} A_k \sin(k\omega t+\varphi_n)$

更一般的周期运动：

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t+\varphi_n) \quad (1)$$

其中A_0, A_n, φ_n为常数。

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n) \quad (1)$$

其中A_0, A_n, φ_n为常数

由三角公式，我们有

$$A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)=A_n\sin\varphi_n\cos n\omega t+A_n\cos\varphi_n\sin n\omega t$$

令$\dfrac{a_0}{2}=A_0$， $a_n=A_n\sin\varphi_n$， $b_n=A_n\cos\varphi_n$，$\omega t=x$，

则(1)式右端变型为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (2)$$

形如(2)式的级数叫做三角级数，其中a_0、a_n、 b_n为常数。

周期为2π的函数

设 $f(x)$ 是周期T = 2π的周期函数，且能展开成三角级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

问题：

1.若能展开, a_i, b_i 是什么?

2.展开的条件是什么?

2. 三角函数系的正交性

基本三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots \cos nx, \sin nx, \cdots$$

在$[-\pi, \pi]$上正交：任意两个不同(相同)函数的乘积在$[-\pi,\pi]$上的积分等于($\neq$)零.

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = 0, \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0. \qquad (\text{其中} m, n = 1,2,\cdots)$$

10.5.2 将函数展开成傅里叶级数

若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$

且级数可以逐项积分

(1) 求a_0.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\int_{-\pi}^{\pi}[\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kxdx+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}b_k\sin kxdx$$

$$=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi,$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$

(2) 求a_n. $(n=1,2,3,\cdots)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx dx]$$

$$=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx=a_n\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx$$

另外 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 0x dx$

若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$

(3) 求b_n.　$(n=1,2,3,\cdots)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nxdx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nxdx]$$

$$=b_n\pi,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

欧拉——傅里叶系数

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, & (n = 0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, & (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

傅里叶级数 对于周期为2π的可积函数 $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

问题:

$$f(x) \underline{\underline{\text{条件?}}} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

10.5.1(收敛定理，狄利克雷(Dirichlet)充分条件)

设 $f(x)$ 是以2π为周期的周期函数.如果它满足条件：在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点,且至多只有有限个极值点,则$f(x)$的傅里叶级数收敛,且

(1) 当x是$f(x)$的连续点时,级数收敛于$f(x)$;

(2) 当x是$f(x)$的间断点时,收敛于$\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$;

注意：函数展开成傅里叶级数的条件比展开成幂级数的条件低得多.

10.5.1(收敛定理，狄利克雷(Dirichlet)充分条件)

设 $f(x)$ 是以为2π周期的周期函数.如果它满足条件：

在一个周期内连续或分段单调，单调区间个数有限，

则$f(x)$的傅里叶级数收敛,且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\begin{cases} f(x) & x\text{是 } f(x)\text{的连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x\text{是 } f(x)\text{的间断点} \end{cases}$$

题目类型：

(1)　将定义在（−∞，∞）上以2π为周期的函数 $f(x)$ 展开成傅立叶级数。

方法：(i)先求傅里叶系数

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, & (n = 0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, & (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

(ii) 写出对应的傅里叶级数 $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

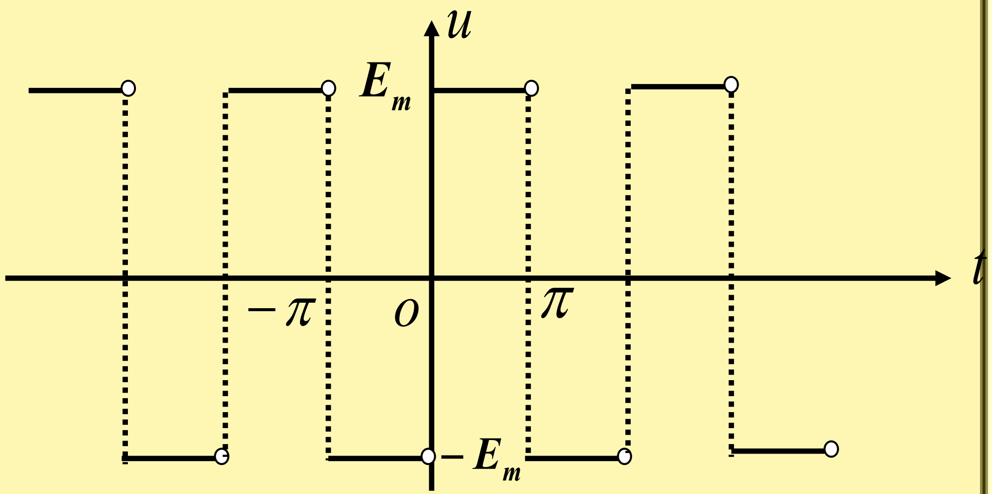
(iii)根据收敛定理写成等式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad x \in 连续点集合$$

例1 以2π为周期的矩形脉冲的波形

$$u(t)=\begin{cases} E_m, & 0\le t<\pi \\ -E_m, & -\pi\le t<0 \end{cases}$$

将其展开为傅立叶级数.



解

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{u}(t)dt=0$$ 奇零偶倍

$$\tilde{u}(t)=\begin{cases} E_m, & 0<t\le\pi \\ 0 & t=0 \\ -E_m, & -\pi\le t<0 \end{cases}$$

$$u(t)=\begin{cases} E_m, & 0\le t<\pi \\ -E_m, & -\pi\le t<0 \end{cases}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cos nt dt \quad =0 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

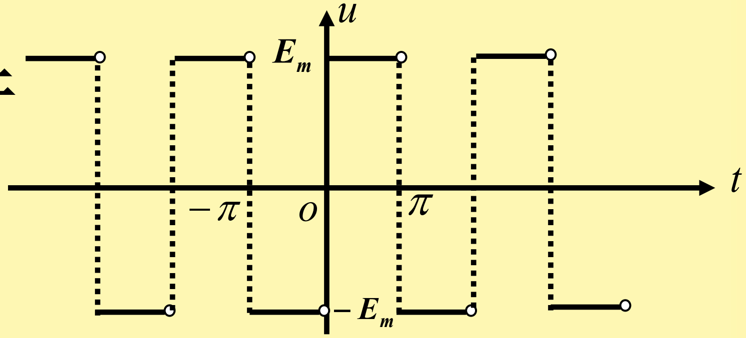
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\sin nt dt \quad =\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}E_m \sin nt dt$$

$$=\frac{2E_m}{n\pi}(1-\cos n\pi) \quad =\frac{2E_m}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases} \dfrac{4E_m}{(2k-1)\pi}, & n=2k-1, \\ 0, & n=2k, \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}^+$$

$$b_n = \frac{2E_m}{n\pi}[1-(-1)^n] = \begin{cases} \frac{4E_m}{(2k-1)\pi}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

所给函数满足狄利克雷充分条件



傅立叶展开式为

$$u(t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4E_m}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E_m}{n\pi}[1-(-1)^n]\sin nt$$

$$(-\infty < t < +\infty; \quad t \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots)$$

函数在点$t = k\pi (k \in \mathbb{Z})$处不连续,

级数收敛于$\dfrac{-E_m + E_m}{2} = 0.$

(2) 将定义在[-π， π] 上的 函数 $f(x)$ 展开成傅立叶级数

方法: (i) 对 $f(x)$ 作周期为 2π 的周期延拓得定义在

(−∞，∞)上的周期函数 $F(x)$.

(ii) $F(x)$的傅立叶级数与 $f(x)$的傅立叶级数

在（ -π， π ）上相同.

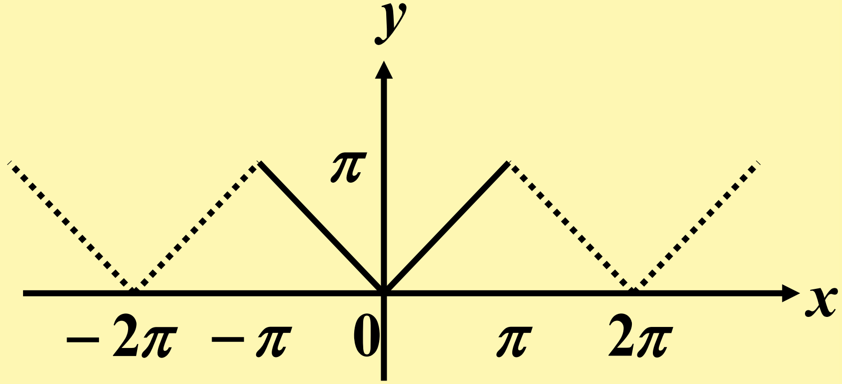
(iii) 再考虑函数在端点的连续性，用收敛定理

得到$f(x)$ 的傅立叶级数展开式。

例2 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 展开为傅立叶级数.

解 所给函数满足狄利克雷充分条件.

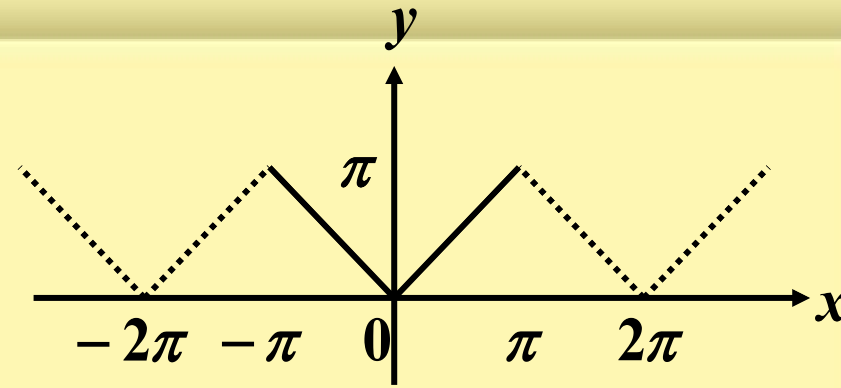
拓广的周期函数的傅立叶级数展开式在 $[-\pi,\pi]$ 收敛于 $f(x)$.



$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0,\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi,$$

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$



$$a_0=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

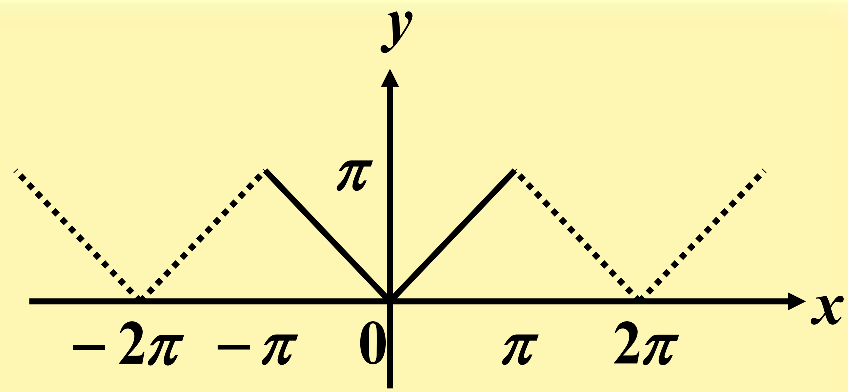
所求函数的傅立叶展开式为

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi}\cos nx$$

$(-\pi\le x\le\pi)$

$\because f(x)$周期延拓后的函数$F(x)$在$x=\pm\pi$处连续

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$



应用： 利用傅立叶展开式求级数的和

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi}\cos nx$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,\quad (-\pi\le x\le\pi)$$

当$x=0$时, $f(0)=0$, $\quad 0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$,

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots \quad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

又 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

10.5.3 正弦级数和余弦级数

1. 奇函数和偶函数的傅里叶级数

（1） 当周期为2π的奇函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数时, 它的傅里叶系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos nx}_{\text{奇函数}}dx = 0 \quad (n = 0,1,2,3,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin nx}_{\text{偶函数}}dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

$$(n = 1,2,3,\cdots)$$

如果 $f(x)$ 为奇函数, 傅立叶级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 称为正弦级数.

(2) 当周期为2π的偶函数$f(x)$展开成傅里叶级数时, 它的傅里叶系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$(n = 0,1,2,3,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0 \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

如果$f(x)$为偶函数, 傅立叶级数$\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

称为**余弦级数**.

例3 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,它在 $[-\pi,\pi)$上的表达式为 $f(x)=x$,将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数.

解 所给函数满足狄利克雷充分条件.

在点 $x=(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$处不连续,

级数收敛于 $\dfrac{\pi+(-\pi)}{2}=0,$

在连续点 $x\,(x\neq(2k+1)\pi)$处，级数收敛于 $f(x)$

$\because f(x)$为奇函数，$\therefore a_n=0 \qquad (n=0,1,2,3,\cdots)$

例3　$f(x)$在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=x$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1},\quad (n=1,2,\cdots)$$

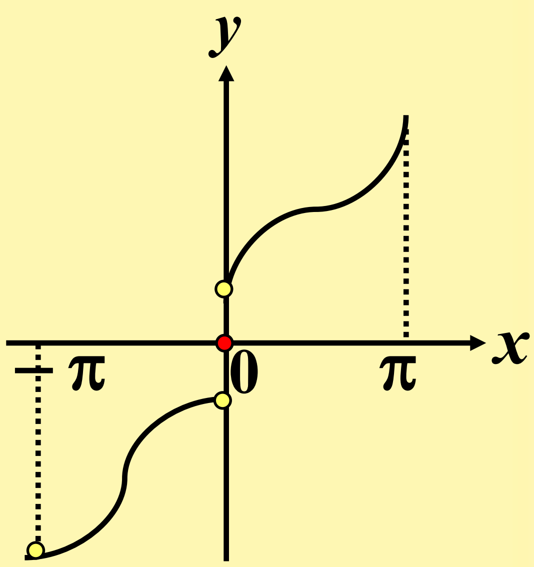
$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$(-\infty<x<+\infty;\quad x\neq\pm\pi,\pm 3\pi,\cdots)$$

2、函数展开成正弦级数或余弦级数

将定义在$[0,\pi]$上的$f(x)$,展开成正弦级数

做法：奇延拓



$$令F(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x\le\pi \\ 0 & x=0 \\ -f(-x) & -\pi<x<0 \end{cases}$$

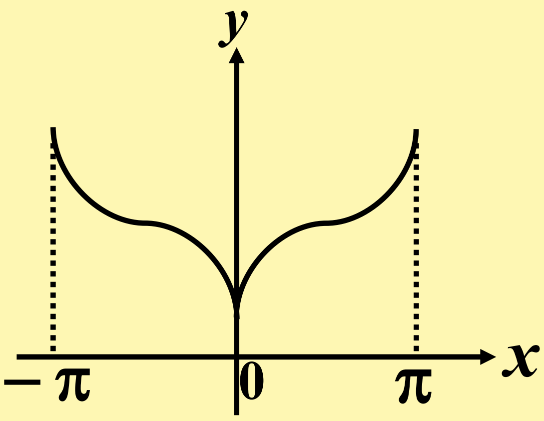
$f(x)$的傅立叶正弦级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx \quad x\in(0,\pi)\cup\{收敛端点\}$$

将定义在$[0,\pi]$上的$f(x)$,展开成余弦级数

做法：偶延拓

$$令F(x)=\begin{cases} f(x) & 0\le x\le \pi \\ f(-x) & -\pi<x<0 \end{cases}$$



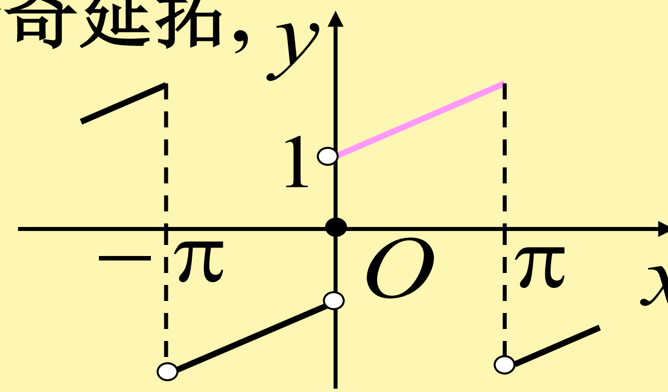
$f(x)$的傅立叶余弦级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

$$(0\le x\le \pi)$$

例4 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le \pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 (1) 求正弦级数. 对 $f(x)$ 进行奇延拓,



$$令F(x)=\begin{cases} x+1 & 0<x\le\pi \\ 0 & x=0 \\ -(-x+1) & -\pi<x<0 \end{cases}$$

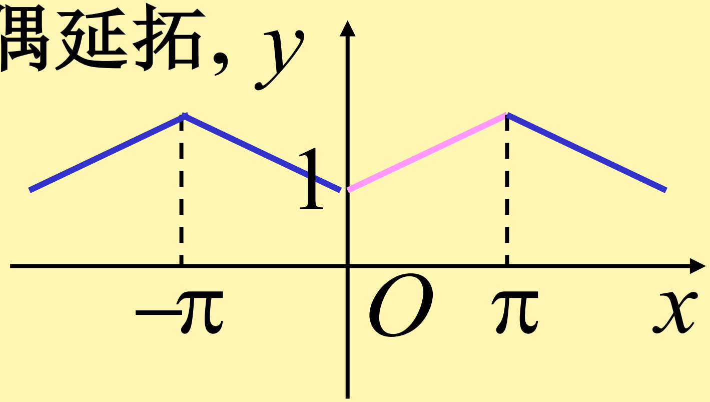
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}(1-(\pi+1)\cos n\pi)=\frac{2}{n\pi}(1-(\pi+1)(-1)^n)$$

$$x+1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(1-(\pi+1)(-1)^n)\sin nx \quad (0<x<\pi)$$

例4 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le \pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

(2) 求余弦级数. 对 $f(x)$ 进行偶延拓,



$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx=\pi+2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)$$

$$x+1=\frac{\pi+2}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx\quad(0\le x\le\pi)$$

总结：将 $f(x)$ 展开傅立叶级数有以下三种情况：

(1)　将定义在（$-\infty$，∞）上的 以2π为周期的函数$f(x)$ 展开成傅立叶级数。

方法：计算 $f(x)$ 的傅立叶系数后得到 $f(x)$ 的傅立叶级数，再用收敛定理得到 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式。

(2)　将定义在$[-\pi，\pi]$上的 函数 $f(x)$ 展开成傅立叶级数。

方法：应对 $f(x)$ 作周期为 2π 的周期延拓得定义在（$-\infty$，∞）上的周期函数 $F(x)$, 将 $F(x)$ 的傅立叶级数限制在$[-\pi，\pi]$，再用收敛定理得到 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式。

(3) 将定义在[0， π]上的 函数 $f(x)$ 展开成正弦（余弦）级数。

方法：应对 $f(x)$ 作奇延拓（或偶延拓），得到定义在上$(-\pi, \pi]$上的函数 $F(x)$, $F(x)$ 的傅立叶级数即为正弦级数（或余弦级数），限制在[0， π]，再用收敛定理得到 $f(x)$ 的正弦级数（或余弦级数）展开式。